# Une première excursion en théorie géométrique des groupe

*Pour faire de la géométrie dans le noir, il suffit d'un esprit illuminé*

Ktacombes, juillet 2020

**Résumé**

Les groupes apparaissent naturellement lorsqu'on cherche à décrire les symétries d'un objet. La théorie géométrique des groupes renverse ce point de vue : en considérant un groupe abstrait comme un objet géométrique, elle cherche à relier ses propriétés géométriques “à grande échelle” à l'algèbre du groupe.

## 1 Qu'est-ce que la théorie géométrique des groupes ?

### (a) Groupe et espace métrique à quasi-isométrie près

(0) Pour ce qui est du contexte, il faut avoir à l'esprit qu'il y a plusieurs types de groupes assez différents, des plus « petits » aux plus « gros » : groupes finis, groupes finiment engendrés, groupes de Lie (par exemple les groupes de matrices) qui sont des variétés de dimension finie, groupes de dimension infinie comme les groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes. Pour ce qui nous intéresse ici, le cadre pertinent est celui des groupes *infinis* mais *finiment engendrés*. Sauf pour la chute...

**Graphe de Cayley** Soit $G$ un groupe, et $\mathcal{S}$ un système de générateurs. Pour l'instant on va penser que $\mathcal{S}$ est un ensemble fini, et souvent on le choisit symétrique :

$$g \in \mathcal{S} \iff g^{-1} \in \mathcal{S}.$$

A la donnée de $G$ et de $\mathcal{S}$ on associe un objet géométrique simple mais important, le **graphe de Cayley** : il s'agit du graphe dont les sommets sont les éléments du groupe, et on met une arête (non orientée) entre $g$ et $ga$ pour tout élément $g$ de $G$ et tout générateur $a$.

L'exemple le plus simple consiste probablement à prendre $G = \mathbb{Z}$, et $\mathcal{S} = \{\pm 1\}$. On obtient un graphe « linéaire » :

$$\cdots - o - o - o - o - \cdots$$

Si on prend $G = \mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{S} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, on obtient un quadrillage. On peut évidemment généraliser à $\mathbb{Z}^d$ pour tout $d > 0$. Un exemple plus intéressant est $\mathbb{F}^2$, le groupe libre à deux générateurs. Ici $\mathcal{S} = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, et le groupe est caractérisé par le fait que tout élément s'écrit de façon unique comme un ”mot réduit”, c'est-à-dire un produit d'éléments de $\mathcal{S}$ dans lequel aucun élément n'est immédiatement suivi de son inverse. Par exemple, $\mathbb{F}^2$ contient les éléments

$$a, ab, ab^2, aba^{-3}, b^2a^{-3}ba^{2020}$$

et tous ces éléments sont distincts. Pour dessiner le graphe de Cayley, on commence par placer un sommet pour l'élément neutre ; de ce sommet partent quatre arêtes qui mènent aux sommets correspondants aux quatre éléments de $\mathcal{S}$ ; de chacun de ces quatre éléments partent à nouveau trois arêtes, par exemple de $a$ on va vers $a^2, ab, ab^{-1}$, *etc.*. A chaque étape on va ainsi construire $4 \times 3^n$ sommets nouveaux : le fait que le groupe est libre dit exactement qu'on ne retombe jamais sur des sommets déjà dessinés ; ou, autrement dit, le graphe ne contient pas de boucle.

Les boucles dans le graphe de Cayley correspondent aux relations non triviales dans le groupe. Si on reprend l'exemple de $\mathbb{Z}^2$ mais qu'on note $\mathcal{S} = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ les quatre générateurs, la relation de commutation $aba^{-1}b^{-1} = e$ dessine un carré.

**Distance** Si on décide que chaque arête du graphe de Cayley est de longueur 1, on obtient une distance $d_{\mathcal{S}}$ sur le groupe $G$. Cette distance s'appelle la « distance des mots » , puisque la distance de $g$ à $g'$ est aussi la longueur du plus petit mot $m$ sur l'alphabet $\mathcal{S}$ tel que $gm = g'$.

On associe donc à tout couple $(G, \mathcal{S})$ une distance sur le groupe $G$. On va chercher à relier les propriétés algébriques de $G$ aux propriétés géométriques de cet espace métrique. Mais on n'a pas encore un bon cadre pour faire ça, il faudrait d'abord se débarrasser du choix des générateurs : on voudrait avoir un invariant associé à un groupe, et non pas à un couple formé d'un groupe et d'un système de générateurs. Or la distance dépend clairement beaucoup de $\mathcal{S}$.

La remarque clé, point de départ de la théorie géométrique des groupes, est que lorsqu'on change de système de générateurs (pour un groupe donné), on change beaucoup l'aspect « local » du graphe de Cayley, mais peu son aspect « global » . Par exemple, reprenons $\mathbb{Z}$ mais changeons le système de générateurs en considérant $\mathcal{S}' = \{2, 3, -2, -3\}$. De chaque sommet partent maintenant beaucoup plus d'arêtes... cependant, si on regarde de loin, on voit quelque chose qui ressemble encore à une droite (avec un peu de gribouillis autour). On dit que la distance ne dépend pas de $\mathcal{S}$ à **quasi-isometrie** près. Définissons précisément ceci. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques $X, Y$ est une quasi-isométrie si (1) il existe deux constantes $k_1, k_2$ telles que pour tous $x, x'$ dans $X$,

$$\frac{1}{k_1} d_X(x, x') - k_2 \leqslant d_Y(f(x), f(x')) \leqslant k_1 d_X(x, x') + k_2$$

et (2) $f$ est « grossièrement surjective » , ce qui signifie qu'il existe une constante $k_3$ telle que tout point de $Y$ est à distance plus petite que $k_3$ d'un point de l'image de $X$. S'il existe une telle application, on dit que $X$ et $Y$ sont quasi-isométriques. On démontre alors facilement :

**Proposition.** *Soit $G$ un groupe finiment engendré, $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux systèmes finis de générateurs. Alors l'identité est une quasi-isométrie entre $(G, d_{\mathcal{S}})$ et $(G, d_{\mathcal{S}'})$.*

*La Théorie Géométrique des Groupes est l'étude des invariants de $(G, d_{\mathcal{S}})$ comme un espace métrique à quasi-isométrie près.* Les invariants obtenus sont des invariants algébriques, au sens où deux groupes isomorphes auront la même théorie géométrique, mais ce sont des invariants algébriques d'un type particulier.

Des exemple classiques de tels invariant : l'hyperbolicité (Gromov 1987), le bord à l'infini, le nombre de bouts (Stalling 1968), la croissance des boules. Détaillons un peu les deux derniers.

### (b) Nombre de bouts

Le nombre de bouts d'un espace métrique est, en gros, le nombre de façon différentes ≪ d'aller à l'infini ≫ . Par exemple, dire qu'un espace a un seul bout signifie que pour toute boule assez grande, le complémentaire a une unique composante connexe non bornée. Le groupe $\mathbb{Z}^d$ a un seul bout si $d > 1$, mais $\mathbb{Z}$ a deux bouts. Le groupe $\mathbb{F}^2$ a une infinité de bouts. Pour des définitions plus précises de cette jolie ≪ théorie topologique des bouts ≫ , voir Wikipédia.

Le nombre de bouts du graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré est un invariant de quasi-isométrie. De plus, on peut montrer qu'il ne peut pas avoir 3 bouts : s'il en a plus que 2, alors il en a une infinité. Un théorème célèbre de Stallings dit que s'il a au moins deux bouts, alors on peut l'écrire comme un ≪ produit amalgamé ≫ ou comme une ≪ HNN-extension ≫ . Si vous voulez les définitions précises il faut encore regarder Wikipédia, mais l'idée est que le nombre de bouts permet de détecter des propriétés importantes concernant la structure algébrique d'un groupe. [1]

### (c) Croissance des boules

Une autre information importante est donnée par la croissance du nombre d'éléments du groupe contenus dans une boule de rayon $n$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Dans $\mathbb{Z}$, ce nombre vaut $2n + 1$ et il croît donc linéairement. Dans $\mathbb{Z}^d$, il croit comme $n^d$, on dit que $\mathbb{Z}^d$ est *à croissance polynomiale*. Dans $\mathbb{F}^2$, comme $3^n$ : on dit que $\mathbb{F}^2$ est *à croissance exponentielle*. Comme vous pouvez l'imaginer, le fait d'être à croissance exponentielle, ou polynomiale, et le degré du polynome dans ce cas, ne dépend pas du système de générateurs, c'est un invariant de quasi-isométrie.

Gromov a démontré en 1981 un théorème encore plus célèbre que celui de Stallings : un groupe finiment engendré est à croissance polynomiale si et seulement si il est nilpotent. On savait déjà que tout groupe nilpotent est à croissance polynomiale (et le degré est relié au degré de nilpotence), mais la preuve de la réciproque est un tour de force, même si elle a été récemment simplifiée (notamment par Tao).

John Milnor a demandé en 1968 s'il existait des groupes dont la croissance des boules est plus que polynomiale mais moins qu'exponentielle. Cette question a conduit à la découverte de nouveaux groupes dit ≪ à croissance intermédiaire ≫ . Il semble qu'on ne sache pas s'il existe de tels groupes parmi les groupes de présentation finie, c'est-à-dire qui ont non seulement un nombre fini de générateurs, mais dont les boucles dans le graphe de Cayley sont engendrées par un nombre fini de ≪ relations ≫ . On sait par contre qu'il

1. ≪ In terms of the fundamental group in algebraic topology, the HNN extension is the construction required to understand the fundamental group of a topological space X that has been 'glued back' on itself by a mapping f (see e.g. Surface bundle over the circle). That is, HNN extensions stand in relation of that aspect of the fundamental group, as free products with amalgamation do with respect to the Seifert-van Kampen theorem for gluing spaces X and Y along a connected common subspace. Between the two constructions essentially any geometric gluing can be described, from the point of view of the fundamental group. ≫

n'existe pas de tels groupes parmi les groupes de matrices : en effet ceux-ci vérifient la (tout aussi célèbre) *alternative de Tits* : ou bien le groupe contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{F}^2$, ou bien il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini...

## 2 Une TGG pour les groupes de transformations ?

De mon côté, les groupes qui m'intéressent le plus sont les plus « gros » de la hiérarchie évoquée au début, typiquement les groupes d'homéomorphismes ou de difféomorphismes d'une variété compacte (comme la sphère ou la boule de dimension $d$). Récemment, Christian Rosendal et Kathryn Mann ont montré qu'on pouvait étendre la théorie géométrique des groupes à ce cadre.

Pour comprendre ce que ça veut dire, revenons d'abord à nos graphes de Cayley. Remarquons que le groupe $G$ agit sur le graphe par multiplication à gauche : en effet, si on a une arête entre $g$ et $g'$, c'est-à-dire si $g' = ga$ avec $a \in \mathcal{S}$, alors on a aussi une arête entre $hg$ et $hg'$ : pour tout élément $h$, l'application $g \mapsto hg$ préserve la structure de graphe. En particulier, c'est une isométrie pour la distance $d_{\mathcal{S}}$.

Il se trouve que la composante connexe des groupes de transformations que je considère est engendrée par l'ensemble $\mathcal{S}$ des applications qui sont l'identité en dehors d'une boule (pour simplifier, on se restreint dans ce qui suit à la composante connexe de l'identité). On peut alors définir la distance des mots $d_{\mathcal{S}}$, comme avant. Mann et Rosendal ont remarqué que cette distance $d$ est *maximale* parmi toutes les distances invariantes à gauche raisonnables sur ces groupes : pour toute autre distance $\delta$, il existe des constantes $k_1, k_2$ telles que pour tous $x, x'$ on a

$$\delta(x, x') \leqslant k_1 d(x, x') + k_2.$$

De plus, toutes les distances maximales sont (clairement) quasi-isométriques. Cette remarque permet donc d'associer à chacun de ces groupes une classe de quasi-isométries d'espaces métriques, comme dans le cas des groupes finiment engendrés. On peut alors se demander à quoi ressemblent les espaces obtenus. Iels ont montré qu'ils sont non bornés dès que le groupe fondamental de la variété est infini. Voici deux questions ouvertes intrigantes :

– Y a-t-il une réciproque au théorème de Mann-Rosendal, autrement dit peut-on trouver des variétés dont le groupe fondamental est fini mais le groupe d'homéomorphismes est non borné ? Le groupe des homéomorphisme de la sphère est borné, mais la question est ouverte, par exemple, pour le groupe des homéomorphismes du plan projectif...

– Peut-on décrire simplement la métrique de Mann-Rosendal pour le groupe des difféomorphisme d'une surface ?