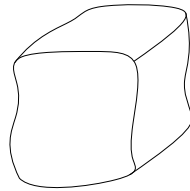


# Comment attraper un chamallow avec des méthodes homotopiques ?

Ktorphée K12

Guillaume Moroz



Lorsqu'on veut attraper un chamallow, on repère d'abord sa position dans l'espace avec nos yeux, puis on doit ensuite déplacer la main sur sa position. Pour bouger notre main, nous agissons uniquement sur la longueur de nos muscles. Il faut alors résoudre un *problème cinématique inverse*, qui consiste à trouver quelles sont les longueurs de muscle qui nous permettent de positionner la main sur le chamallow. Cela revient à résoudre un système d'équations polynomiales en plusieurs variables. Nous allons voir ici une suite de méthodes qui permettent de trouver toutes les solutions complexes d'une équation polynomiale en une variable d'abord, puis d'un système d'équations en plusieurs variables.

## I. Le cas une variable

La première question qu'on peut se poser est comment représenter une solution d'une équation polynomiale. En effet, au-delà du degré 4, on sait depuis Ruffini, Abel et Galois que les solutions ne peuvent pas forcément s'écrire avec des formules par radicaux. Cependant, on peut représenter chacune de ses solutions sous la forme d'un programme, qui prend en entrée un entier  $k$ , et renvoie la  $k$ -ième décimale de la solution représentée. Cela revient à écrire un programme qui permet d'approcher un nombre aussi près que l'on veut.

### I.1 Méthode de Newton en une variable

La *méthode de Newton* est peut-être la méthode la plus connue pour approcher une solution d'équation polynomiale en une variable, à condition de connaître

une solution approchée.

Dans cette section, on considère un polynôme univarié  $f(z)$  de degré  $d$  à coefficients réels ou complexes.

### a) Approximation numérique

Étant donné le polynôme  $f$ , on peut lui associer l'opérateur de Newton  $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ , défini pour tout  $z$  tel que  $f'(z) \neq 0$ . Pour un nombre complexe initial  $z_0$  donné, on peut définir la suite de Newton par récurrence, tant que  $f'(z_k) \neq 0$  :

$$z_{k+1} = N(z_k) = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

Étant donné une racine  $\zeta$  de  $f$  telle que  $f'(\zeta) \neq 0$ , il existe un disque  $D$  centré en  $\zeta$  et de rayon strictement positif tel que pour tout  $z_0 \in B$ , la suite de Newton converge vers  $\zeta$ . Réciproquement, pour un nombre complexe  $z_0$  donné, on peut utiliser la théorie de Kantorovich (Dedieu 2006, Théorème 88) pour déterminer a priori si la suite de Newton va converger vers une racine de  $f$ . Soient  $r = 2 \left| \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right|$  et  $K = \sup_{|z-z_0| \leq r} \left| \frac{f''(z)}{f'(z_0)} \right|$ . Si  $rK \leq 1$ , alors le disque de rayon  $r$  centré en  $z_0$  contient une unique solution  $\zeta$  de  $f(z) = 0$  et la suite de Newton avec valeur initiale  $z_0$  converge vers  $\zeta$ . Dans ce cas, la convergence est même *quadratique*, au sens où il existe une constante  $C$  telle que  $|\zeta - z_k| < C(1/2)^{2^k - 1}$ . De façon plus générale, on dit que le *bassin de convergence* de  $\zeta$  est l'ensemble de points  $z_0$  tels que la suite de Newton initialisée en  $z_0$  converge vers  $\zeta$ . Ces bassins sont illustrés en Figure 1.

Des travaux ont aussi montré que l'on peut construire un ensemble  $\mathcal{S}_d \subset \mathbb{C}$  de  $O(d \log d)$  points complexes répartis uniformément sur  $O(\log d)$  cercles de rayons assez grands, tel que pour chaque racine  $\zeta$  de  $f$ , il existe un point de  $\mathcal{S}_d$  dans son bassin de convergence (Hubbard, Schleicher, et Sutherland 2001).

### b) Certification par intervalle

La méthode de Newton peut aussi être utilisée pour garantir l'existence d'une solution dans un intervalle réel ou dans un boîte complexe  $I$  de centre  $z_0$ . En supposant que  $f$  est injective sur  $I$ , l'idée est d'utiliser le théorème du point fixe sur la fonction suivante:

$$g(z) = z_0 - \frac{f(z_0)}{\Delta_f(z, z_0)}.$$

où  $\Delta_f(z, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  si  $z \neq z_0$  et  $f'(z_0)$  sinon (Neumaier 1990, vol. 37, sect. 5.4). En effet on peut remarquer que  $g(z) = z$  implique  $f(z) = 0$ . Ainsi, si  $\Delta_f(I, z_0)$  ne contient pas 0 et si  $g(I) \subset I$ , alors le théorème du point fixe de Brouwer (Brouwer 1912) garantit qu'il existe un point  $z$  dans  $I$  tel que

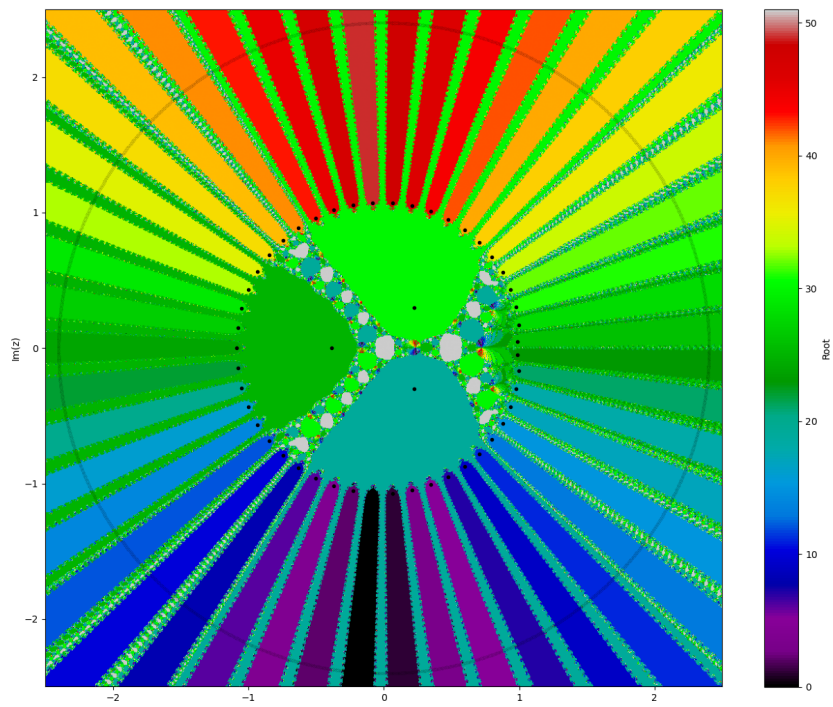


Figure 1: Les bassins de convergences des racines du polynôme  $z^{50} + 8z^5 - \frac{80}{3}z^4 + 20z^3 - 2z + 1$ , ainsi que les deux cercles rapprochés sur lesquels choisir les points initiaux pour la méthode de Newton.

$g(z) = z$ . On a ainsi la garantie que  $I$  contient une racine de  $f$ . Réciproquement, la propriété de convergence quadratique de la suite de Newton implique que ce prédicat sera satisfait pour un intervalle assez petit autour d'une racine simple.

## I.2 Méthode de Weierstrass

La méthode de Weierstrass décrite d'abord en 1891, puis redécouverte par Durand et Kerner en 1966, permet d'approcher simultanément toutes les racines d'un polynôme univarié. Elle s'appuie sur une généralisation de la méthode de Newton au cas de plusieurs polynômes en plusieurs variables.

### a) Méthode de Newton en plusieurs variables

La méthode de Newton se généralise directement pour les systèmes de  $n$  équations polynômiales en  $n$  variables de la forme:

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(z_1, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned}$$

On notera  $F$  l'application polynomiale de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  qui au vecteur  $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  associe le vecteur  $(f_1(Z), \dots, f_n(Z))$ . On notera aussi  $J(Z)$  la *matrice jacobienne* de  $F$  en  $Z$  définie ainsi:

$$J(Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(Z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(Z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(Z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(Z) \end{pmatrix}$$

On peut alors définir la suite de Newton par récurrence comme dans le cas univarié:

$$Z_{k+1} = N(Z_k) = Z_k - J(Z_k)^{-1}F(Z_k).$$

La théorie de Kantorovich s'applique alors de façon similaire, et garantit que la suite de Newton converge vers une racine du système  $F(Z) = 0$  pour un vecteur initial de nombres complexes  $Z_0$  assez proche (Dedieu 2006, Théorème 88).

### b) Approximation simultanée des racines d'un polynôme

La méthode de Weierstrass consiste à appliquer tout simplement la suite de Newton au système d'équations polynômiales associé aux *relations de Viète* entre

les coefficients et les racines d'un polynôme. En effet, en écrivant un polynôme  $f(z)$  sous sa forme factorisée et développée, on a :

$$(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_d) = f_0 + \cdots + f_{d-1}z^{d-1} + z^d .$$

Si on connaît les  $f_i$ , et que l'on considère les  $\zeta_i$  comme inconnues, cela nous donne un système de  $d$  équations en  $d$  inconnues. En choisissant bien le vecteur initial de  $d$  points complexes, la suite de Newton définie pour un système multivarié introduite en section précédente converge alors vers un vecteur de toutes les solutions de  $f$ .

### I.3 Méthode d'Ehrlich-Aberth

La *méthode d'Ehrlich-Aberth* est une autre variante de la méthode Newton qui permet d'approcher rapidement le vecteur des solutions d'un polynôme  $f$ . Le principe de cette méthode consiste à effectuer un préconditionnement numérique de  $f$  avant d'appliquer la suite de Newton. Supposons que l'on connaisse des approximations numériques  $z_2, \dots, z_d$  des racines  $\zeta_2, \dots, \zeta_d$  de  $f$  et que l'on cherche la racine  $\zeta_1$ . On introduit alors la fonction  $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_2)\cdots(z-z_d)}$ , qui est une approximation de la fonction  $z - \zeta_1$ . Hors, pour une fonction linéaire, la suite de Newton converge en une étape vers son unique racine. Empiriquement, on s'attend donc à ce que la suite de Newton appliquée en  $g$  converge plus rapidement que appliquée en  $f$ . Par ailleurs, l'utilisation des autres racines approchées dans la formule introduit un effet répulsif, qui permet d'éviter que plusieurs points convergent vers la même racine. Pour approcher la racine  $\zeta_1$ , on peut alors introduire l'opérateur d'Ehrlich-Aberth :

$$\begin{aligned} \text{EA}_1(z) &= z - \frac{g(z)}{g'(z)} \\ &= z - \frac{1}{\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=2}^d \frac{1}{z-z_j}} . \end{aligned}$$

De façon similaire, on peut introduire les opérateurs  $\text{EA}_2, \dots, \text{EA}_d$ . L'algorithme d'approximation simultanée des racines consiste alors à choisir un vecteur initial de  $d$  points complexes, puis d'appliquer alternativement les opérateurs  $\text{EA}_1, \dots, \text{EA}_d, \text{EA}_1, \dots, \text{EA}_d, \text{EA}_1, \dots$

### I.4 Choix des points initiaux

Un élément crucial de toutes les méthodes présentées précédemment est le choix du point ou des points initiaux. Une façon de choisir ces points est de voir l'évaluation d'un polynôme en un point  $z_0$  comme la combinaison linéaire de  $d + 1$  termes de la forme  $t_j(z_0) = f_j z_0^j$ . De plus, pour un nombre complexe  $z_0$  on note  $k_1(z_0)$  et  $k_2(z_0)$  les indices des deux termes dont les valeurs absolues sont les plus grandes.

Le choix des points approchant les racines se fait alors avec l'idée suivante. Si  $\zeta$  est une racine de  $f$ , cela signifie que les deux termes de plus grands modules sont du même ordre de grandeur pour pouvoir se compenser. On choisit donc comme racines approchées des points  $z_0$  tels que  $|t_{k_1}(z_0)| = |t_{k_2}(z_0)|$ . Ces points peuvent s'obtenir de façon géométrique avec le *polygone de Newton*.

Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe inférieure des  $d + 1$  points  $P_j = (j, -\log |f_j|)$  pour  $0 \leq j \leq d$ , comme sur la figure 2. Si  $P_j P_k$  est une arête du polygone de Newton de pente  $a$ , alors, pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $|z_0| = e^a$ , on a  $|t_{k_1}(z_0)| = |t_{k_2}(z_0)|$ .

Pour les méthodes de Weierstrass et de Ehrlich-Aberth, en choisissant au hasard le vecteur de points initiaux, la suite de Newton converge vers les solutions de  $f$  avec grande probabilité. Cependant, le logiciel MPSolve utilise plutôt les points à l'aide du polygone de Newton, ce qui permet en pratique d'avoir une convergence plus rapide vers les solutions de  $f$  (Bini et Fiorentino 2000; Bini et Robol 2014).

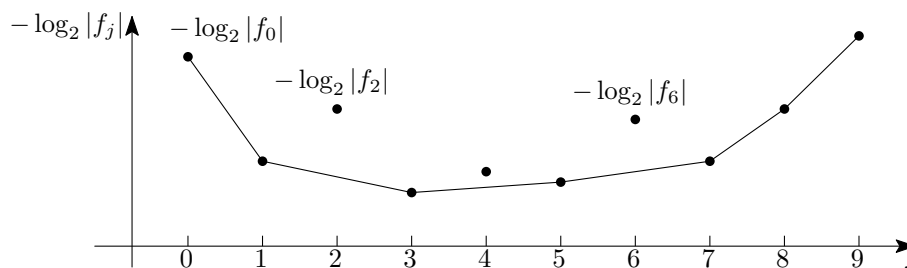


Figure 2: Polygone de Newton associé à un polynôme de degré 9

## II. Le cas plusieurs variables

Dans le cas d'un système polynomial en  $n$  variables avec  $n \geq 2$ , la méthode de Newton ne permet de trouver les solutions que si l'on connaît déjà une racine suffisamment proche. Dans le cas univarié, on a vu qu'il était possible de trouver les racines d'un polynôme en partant d'un ensemble quelconque de points, en utilisant les méthodes de Weierstrass ou de Ehrlich-Aberth. Dans le cas multivarié, il est aussi possible d'obtenir les racines d'un système de polynômes en utilisant des méthodes dites d'*homotopie*. Comme pour le cas univarié, on utilisera comme points initiaux des solutions de systèmes binomiaux, c'est à dire dont les polynômes n'ont que deux termes chacun. Dans cette section on s'intéressera uniquement au solution dans  $\mathbb{C} \setminus 0$ , à savoir les vecteurs de solutions pour lesquels toutes les coordonnées sont des nombres complexes non nuls.

### II.1 Systèmes binomiaux

Le cas des systèmes binomiaux est très intéressant car il peut se résoudre avec de l'algèbre linéaire sur les vecteurs d'exposants. Sans restriction de généralité, ce système est de la forme:

$$\begin{aligned}
u_1 &:= z_1^{a_{1,1}} \cdots z_n^{a_{1,n}} = 1 \\
&\vdots \\
u_n &:= z_1^{a_{n,1}} \cdots z_n^{a_{n,n}} = 1
\end{aligned}$$

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice des exposants de ce système. En utilisant la décomposition de Smith, on peut trouver des matrices  $S, D, T$  à coefficients entiers, telles que

$$D = SAT,$$

avec  $D$  une matrice diagonal, et  $S$  et  $T$  des matrices inversibles dans  $\mathbb{Z}$ . Ainsi, en appliquant les changements de polynômes et de variables suivant:

$$\begin{cases} v_1 = u_1^{s_{1,1}} \cdots u_n^{s_{1,n}} \\ \vdots \\ v_n = u_1^{s_{n,1}} \cdots u_n^{s_{n,n}} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1^{t_{1,1}} \cdots z_n^{t_{1,n}} \\ \vdots \\ y_n = z_1^{t_{1,n}} \cdots z_n^{t_{n,n}} \end{cases}$$

on obtient le système d'équation  $v_i = 1$ , où chaque équation est en une variable, de la forme  $y_i^{d_i} = 1$ . Les solutions de ce système sont des racines de l'unité, et le changement de variable que nous avons introduit nous permet de retrouver ainsi toutes les solutions du système de départ en les variables  $z_1, \dots, z_n$ . Cette approche est notamment utilisée comme point de départ pour trouver toutes les solutions d'un système polynômial avec des équations ayant plus de deux termes (Huber et Sturmfels 1995, sect. 3).

## II.2 Méthode de continuation homotopique

Dans le cas général, les solutions d'un système d'équations polynômiales en plusieurs variables peuvent se trouver avec la méthode de continuation homotopique. Soit  $F(Z) = (f_1(Z), \dots, f_n(Z))$  une fonction polynômiale de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  dont on veut trouver les racines  $\mathcal{Z}$  telles que  $F(\mathcal{Z}) = 0$ . Supposons que  $G$  est une autre application polynômiale de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  dont on connaît les racines. On peut alors introduire une nouvelle variable  $t$ , et déformer la fonction  $G$  vers  $F$  avec la fonction suivante:

$$H(t, Z) = (1 - t)G(Z) + tF(z)$$

En particulier,  $H(0, Z) = G(Z)$  et  $H(1, Z) = F(Z)$ . Si on connaît  $\mathcal{Z}_0$  une racine de  $G$ , on peut alors remarquer que pour un réel  $\varepsilon > 0$  pas trop grand,  $\mathcal{Z}_0$  sera un point proche de la racine de  $H(\varepsilon, Z) = 0$ . Ainsi, on pourra utiliser  $\mathcal{Z}_0$  comme point de départ d'une méthode de Newton pour trouver une racine  $\mathcal{Z}_\varepsilon$  de  $H(\varepsilon, Z) = 0$ . On peut ensuite à nouveau ajouter  $\varepsilon$  et trouver une racine de  $H(2\varepsilon, Z) = 0$  en appliquant une méthode de Newton à partir de  $\mathcal{Z}_\varepsilon$ . Petit

à petit, sous certaines hypothèses vérifiées génériquement, cette approche par continuation nous permettra au final de retrouver  $\mathcal{Z}_1$  une racine de  $H(1, Z) = F(Z) = 0$ . Cette approche dite de *continuation homotopique* permet de résoudre un grand nombre de systèmes d'équations polynômiales, et est implantée dans plusieurs logiciels, comme `PHCpack` ou `HomotopyContinuation.jl` par exemple. De nombreuses optimisations peuvent être utilisées dans l'étape de suivi de solutions. En particulier, à la place de  $\mathcal{Z}_0$  comme point initial de la méthode de Newton pour trouver une solution de  $H(\varepsilon, Z) = 0$ , on peut utiliser un prédicteur, qui calcule un autre vecteur initial  $Z'_0$ . Ce vecteur  $Z'_0$  peut être obtenu par exemple à l'aide d'une approximation de Padé de  $H(t, Z)$  autour de  $t = 0$  et  $Z = \mathcal{Z}_0$  (Telen, Van Barel, et Verschelde 2020).

### II.3 Choix du système de départ

Afin de trouver toutes les solutions d'un système  $F(Z) = 0$  avec une méthode de continuation homotopique, le système de départ  $G(Z) = 0$  doit avoir le même nombre de solutions que le système  $F(Z) = 0$ .

Une façon de compter le nombre de solutions du système  $F(Z) = 0$  dans  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$  est de définir des polygones associés à chaque polynôme, et de calculer un volume associé à leur *somme de Minkowski*. Étant donnés  $k$  ensembles  $E_1, \dots, E_k$  de  $\mathbb{R}^n$ , leur somme de Minkowski notée  $E_1 + \dots + E_k$  est l'ensemble des points  $q$  tels que  $q = p_1 + \dots + p_k$  avec  $p_1 \in E_1, \dots, p_k \in E_k$ .

Le théorème principal requiert l'introduction de quelques définitions et notations. À chaque polynôme  $f$  on peut associer son *support* qui est l'ensemble des vecteurs d'indices  $\alpha = (k_1, \dots, k_n)$  tels que les coefficients de  $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$  dans  $f$  soient non nuls. On définit ensuite le *polygone de Newton* de  $f$  comme l'enveloppe convexe des points  $(k_1, \dots, k_n)$  apparaissant dans le support de  $f$ . Étant donnés  $n$  polygones  $P_1, \dots, P_n$  et  $n$  nombres réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , on note  $\lambda_i P_i$  le polygone  $P_i$  dont les longueurs sont multipliées par  $\lambda_i$ , et  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  la somme de Minkowski de ces polygones. Si on considère  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comme des variables symboliques, alors le volume  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  du polygone  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  est un polynôme homogène de degré  $n$  en  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On définit alors le *volume mixte* de  $n$  polygones dans  $\mathbb{R}^d$  comme le coefficient du monôme  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  dans le polynôme  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On peut maintenant énoncer le théorème principal qui permet de compter le nombre de solutions d'un système polynomial.

**Theorem 1 (Bernstein, Khovanskii, Kushnirenko)** *Le nombre de racines dans  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$  d'un système générique d'équations  $f_1 = \dots = f_n = 0$  avec  $\text{supp}(f_i) = P_i$  est  $n!$  fois le volume mixte de  $P_1, \dots, P_n$ .*

Après avoir trouvé le nombre de solutions, on peut construire un système de départ  $G(Z) = 0$  qui aura le même nombre de solutions que  $F(Z) = 0$ . Il existe plusieurs façons de construire le système de départ. En particulier, il peut être construit par exemple en utilisant les facettes de la somme de Minkowski  $P_1 + \dots + P_n$ .



Dans ce cas, on parle d'homotopie polyhedrale (Huber et Sturmfels 1995).

## II.4 Homotopie et robotique

Au final, si on veut fabriquer un robot capable d'attraper un chamallow, on peut modéliser les différentes liaisons mécaniques de son bras articulé à l'aide d'équations polynômiales qui représentent des contraintes géométriques. Puis le robot pourra identifier la position du chamallow à l'aide d'un système de plusieurs caméras pour reconstruire sa position en trois dimensions, et résoudre avec des méthodes de continuation homotopique le système d'équations polynômiales dont les solutions correspondent à placer sa main sur le chamallow !

## Références

- Bini, Dario A., et Giuseppe Fiorentino. 2000. « Design, analysis, and implementation of a multiprecision polynomial rootfinder ». *Numerical Algorithms* 23 (2): 127-73. <https://doi.org/10.1023/A:1019199917103>.
- Bini, Dario A., et Leonardo Robol. 2014. « Solving secular and polynomial equations: A multiprecision algorithm ». *Journal of Computational and Applied Mathematics* 272: 276-92. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.037>.
- Brouwer, L. E. J. 1912. « Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten ». *Mathematische Annalen* 71: 97-115. <http://eudml.org/doc/158520>.
- Dedieu, Jean-Pierre. 2006. *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*. Mathématiques et Applications. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/3-540-37660-7>.
- Hubbard, John, Dierk Schleicher, et Scott Sutherland. 2001. « How to find all roots of complex polynomials by Newton's method ». *Inventiones mathematicae* 146 (1): 1-33. <https://doi.org/10.1007/s002220100149>.
- Huber, Birkett, et Bernd Sturmfels. 1995. « A polyhedral method for solving sparse polynomial systems ». *Math. Comput.* 64 (212): 1541-55. <https://doi.org/10.2307/2153370>.
- Neumaier, Arnold. 1990. *Interval methods for systems of equations*. Vol. 37. *Encycl. Math. Appl.* Cambridge etc.: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526473>.
- Telen, Simon, Marc Van Barel, et Jan Verschelde. 2020. « A robust numerical path tracking algorithm for polynomial homotopy continuation ». *SIAM J. Sci. Comput.* 42 (6): a3610-37. <https://doi.org/10.1137/19M1288036>.